

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ

Τρίτη, 10 Οκτωβρίου 2017

Βιβλία

- Κάκουλου (κεφ 2-4)
- Σάρας (κεφ 3-5)
- Βασιλείου (κεφ 1-5) ←
- Αρτίκη (κεφ 1-3)

users.uoi.gr/abatsidis

Γραφείο: 3098

Αιφορία: φαινόμενο από το χώρο της φυσικής, που το παρατήρησε ο Βρούνι το 1827. Το φαινόμενο αυτό ήταν η άτακτη τυχαία κίνηση ενός σωματιδίου σε υγρό ή αέριο.

Στη συνέχεια ασχολήθηκε ο Einstein (1905) και ο Wiener (1923) χρεώνοντας το κοθ.

Κίνηση Βρούνι ή Wiener!

Οι στοχαστικές διαδικασίες ασχολούνται με την ανάλυση τυχαίων και δυνατικών φαινομένων.

Τυχαία λέγεται το φαινόμενο του οποίου η έκβαση είναι αβέβαιη αλλά ανήκει σε ένα σύνολο από δυνατά.

Δυνατικό λέγεται το φαινόμενο που εξελίσσεται στο χρόνο ή στο χώρο.

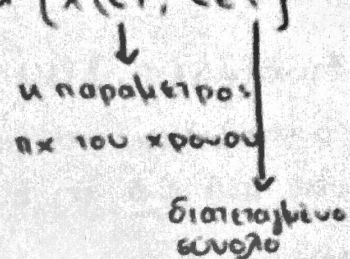
πχ: -16071μία ευρώ με δολάριο

αριθμός φοιτητών που είναι συνδεδεμένοι στο στρομο

τιμή μετοχής κάποιο χρονικό διάστημα

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια στοχαστική διαδικασία είναι μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών σε ένα χώρο πιθανοτήτων $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, δηλαδή $\{X(t), t \in T\}$



$X(t)$: η ε.δ. που περιγράφει τον αριθμό των φοιτητών τη χρονιά t

$$X(0) = 17$$

Ω : δυνατός χώρος

F : σ -άλγεβρα

P : μέτρο πιθανότητας
με αριθμητικό, αριθμητικό,
προσθετικό και κανονικοποιημένο

Χώρος
Πιθανότητας

Όταν η παράμετρος t παίρνει τιμές σε διαστήματα, τότε λέμε ότι έχουμε ε.δ. σε συνεχή χρόνο

Όταν η παράμετρος t παίρνει διακριτές τιμές, τότε λέμε ότι έχουμε ε.δ. σε διακριτό χρόνο

$X(t)$ αριθμός των φοιτητών στο εστιασμένο κατά τη διάρκεια της ημέρας

$X(t)$	στις	8^{00}	14^{00}	20^{00}	24^{00}
X_n				t_1	t_2	t_3	t_4

ΟΡΙΣΜΟΣ

Κάθε δυνατή τιμή μιας ε.δ. λέγεται κατάσταση

Το σύνολο των καταστάσεων αποτελεί τον χώρο καταστάσεων της ε.δ. (σύνολο S)

π.χ.: $X(t)$ η αξία μιας μετοχής \rightarrow ε.δ. σε συνεχή χρόνο

Εάν το σύνολο καταστ. $[0, +\infty)$, είναι συνεχές

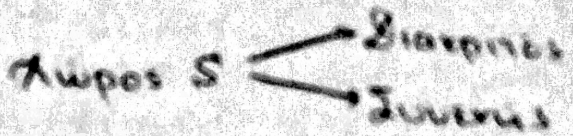
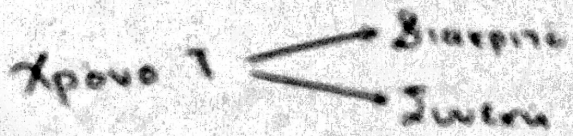
- X_n η κατάσταση του αβαντέρ, $\{ \underset{0}{\text{ΛΕΙΤ}}, \underset{1}{\text{ΔΕΝ ΛΕΙΤ}} \}$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια стоχαστική διαδικασία λέμε ότι παίρνει τιμές σε διακριτό χώρο όταν ο χώρος των καταστάσεων παίρνει διακριτές τιμές.
Ενώ λέμε ότι έχουμε μια ε.δ. με συνεχή χώρο καταστάσεων, όταν ο χώρος των καταστάσεων S είναι συνεχές σύνολο.

2

σε διακρ. χρόνο με διακρ. χώρο	σε συν. χρόνο με διακρ. χώρο
σε διακρ. χρόνο με συν. χώρο	σε συνεκρ. χρόνο με συνεκρ. χώρο



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1 Ανάπτυξη Πηλιδυοειών

Εστω $x(t)$ ο αριθμός των μελών ενός πληθυσμού

Αρχικό μέγεθος $x(0)$

$$x(t) = x(0) + \underbrace{M\pi(t)}_{\substack{\text{όσοι γεννήσαν} \\ \text{μέχρι των } t}} - \underbrace{E\phi(t)}_{\substack{\text{όσοι πέθαναν} \\ \text{μέχρι των } t}}$$

- Συνεκρ. ~~χρόνος~~ χρόνος
- Διακριτός χώρος

2 Έλεγχος αποθήκευσης

X_n : ο αριθμός των προϊόντων στο εσωτερικό μηχαν/ους μιας αποθήκης στο τέλος του n-οστού κύκλου

Y_n : ο αριθμός ... για παρτία μιας αποθήκης

$$X_n = \underbrace{X_{n-1}}_{\substack{\text{αριθμός} \\ \text{στο τέλος} \\ \text{του } n\text{-οστού} \\ \text{κύκλου}}} + \underbrace{A\Gamma_n}_{\substack{\text{όσοι αγοράσαν} \\ \text{στο διαστημα} \\ (n-1, n) \text{ επί} \\ \text{των σταθίων}}} - \underbrace{2HT_n}_{\substack{\text{όσο πουλήσαν} \\ \text{από τους} \\ \text{πληθ.}}$$

$$Y_n = \max \{ 0, X_{n-1} + A\Gamma_n - 2HT_n \}$$

β) Οικολογική αντιστάθμιση

Έστω A, B δύο εκδοτικά γλυκύσχοι που ζουν μαζί σε κάποιο συγκεκριμένο περιβάλλον. Αν μέλος του A γλυδ. έρθει με μέλος B γλυδ. γίνεται μέλη

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ο } A \text{ σκοτώνει τον } B \text{ με πιθανότητα } p \\ \text{Ο } B \text{ σκοτώνει τον } A \text{ με πιθανότητα } q \end{array} \right\} p+q=1$$

Έστω X_n η ε.δ. που παριστάνει τον αριθμό των μελών του γλυδ. A μετά τη n -οστή βραχή

$$X_n = X_{n-1} + \Gamma_n - \Pi_n + Z_n$$

\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow
 αριθμός αριθμός αριθμός αριθμός
 μετά την μετά την γεννήσεων θανάτων
 n -οστή βραχή $n-1$ βραχή $(n-1, n)$ $(n-1, n)$

$$Z_n = \begin{cases} -1, & \text{εάν κερδίσει το } A \\ 0, & \text{εάν κερδίσει το } B \end{cases} \quad \begin{array}{l} P(Z_n = -1) = q \\ P(Z_n = 0) = p \end{array}$$

ΤΑΣΙΝΟΜΗΣΗ ΤΟΥ Σ.Β. ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΙΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΕΞΑΡΤΗΣΗΣ ΠΟΥ ΤΗΝ ΑΠΟΤΕΛΟΥΝ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια ε.δ. ονομάζεται Μαρκοβιανή, αν δοθείς της κατάστασης τη χρ. στιγμή t (παρόν), η κατάσταση της τη χρ. στιγμή s , με $s < t$ (μέλλον) δεν εξαρτάται από τις χρ. στιγμές $u, u < s$ (παρελθόν)

Συμβαίνει $\Rightarrow P(a < X(s) < b \mid X(t) = \dots, \dots, X(u) = \dots) = P(a < X(s) < b \mid X(t))$

$$P(X_n = j \mid X_0 = \dots, X_1 = \dots, \dots, X_{n-1} = i) = P(X_n = j \mid X_{n-1} = i)$$

3)

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια ε.δ. σε διακριτό χρόνο με διακριτό χώρο, που επιπλέον ικανοποιεί τη Μαρκοβιανή ιδιότητα, λέγεται Μαρκοβιανή αλυσίδα (Μ.Α.)

$$P(X_{n+1}=j | X_n=i) = P_{ij}(n-1, n)$$

Η πιθανότητα να μεταβί από την κατάσταση i που βρίσκεται τη χρονική στιγμή $n-1$, στη κατάσταση j τη χρονική στιγμή n

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια Μ.Α. λέμε ότι έχει την ιδιότητα της στατικότητας και των αυτομόνομων Μ.Α. αν η $P_{ij}(n-1, n)$ είναι ανεξάρτητη του $n, \forall i, j \in S$

P_{ij} : πιθανότητες μεταβάσεως ενός βήματος

ΟΜΟΓΕΝΗΣ Μ.Α. ΔΥΟ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ

X_n : μια ε.δ. σε διακριτό χρόνο με διακριτό χώρο καταστάσεων $S = \{0, 1\}$
Το μέλλον εξαρτάται από το παρόν και όχι από το παρελθόν

$P_{ij}(n-1, n)$ ανεξίτητες από το n

Οι πιθανότητες μεταβάσεως ενός βήματος είναι:

→ $P_{00} = P(0 \rightarrow 0)$

→ $P_{01} = P(0 \rightarrow 1)$

→ $P_{10} = P(1 \rightarrow 0)$

→ $P_{11} = P(1 \rightarrow 1)$

Εναλλακτικά, μας δίνεται ο πίνακας των πιθανοτήτων μεταβάσεως

$$P = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} P_{00} + P_{01} &= 1 \\ P_{10} + P_{11} &= 1 \end{aligned}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ a & 1-b \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} a+b=0 \\ a+b=2 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} a+b=0 \rightarrow a+b=0 \rightarrow P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ a+b=2 \rightarrow a+b=1 \rightarrow P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right\} \rightarrow \text{Zeu unapreuz uzukha uo 1a gjeratade}$$