Στοχαστικες Διαδικασιες

Τριτη, 10 Οκτωβριου 2017

Βιβλια

- Κακουλου (κεφ 2-4)
- Δαρας (κεφ. 3-5)
- Βασιλειου (κεφ. 1-5) ←
- Αρτικη (κεφ 1-3)

users.uoi.gr/abatsidis

Γραφειο 309γ

Αφορμη: φαινομενο από το χώρο της φυσικής, που το παρατηρησε ο Brown το 1827. Το φαινόμενο αυτό ηταν η ατακτη τυχαία κινηση ενος σωματιδιου σε υγρό ή αεριο.

Στη συνέχεια ασχολήθηκε ο Einstein (1905) και ο Wiener (1923) χρησιμο ποιώντας το ΚΟΘ

Κινηση Brown ή Wiener!

Οι στοχαστικές διαδικασιες ασχολούνται με την αναλυση τυχαιων και δυναμικών φαινομένων

Τυχαίο λέγεται το φαινόμενο του οποιου η εκβαση ειναι αβέβαιη αλλά ανήκει σ ενα σύνολο από δυνατα

Δυναμικό λέγεται το φαινόμενο που εξελισσεται στο χρονο η στο χώρο

πχ: • ισοτιμια ευρώ με δολαριο

αριθμός φοιτητών που ειναι συνδεδεμενοι στο ecourse

τιμή μετοχής καποιο χρονικό διαστημα

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια στοχαστικη διαδικασια ειναι μια οικογενεια τυχαιων μεταβλητών ενα χώρο πιθανοτήτων* (Ω, F, P), δηλαδή $\{X(t), t\in T\}$

η παραμετρος πχ του χρονου

διατεταγμένο σύνολο

$X(t)$: η σ.δ. που περιγράφει τον αριθμό των φοιτητών τη χρ. στ. t

$X(0) = 17$

Ω: δειγματικός χώρος

F: σ-άλγεβρα

P: μέτρο πιθανότητας με αρνητική, αριθμήσιμα προσθετική και κανονικοποιημένη

$\left.\right\}$ Χώρος Πιθανοτήτων

Όταν η παράμετρος t παίρνει τιμές σε διάστημα, τότε λέμε ότι έχουμε <u>σ.δ. σε συνεχή χρόνο</u>

Όταν η παράμετρος t παίρνει διακεκριμένες τιμές, τότε λέμε ότι έχουμε <u>σ.δ. σε διακριτό χρόνο</u>

$X(t)$ αριθμός των φοιτητών στο στέκι κατά τη διάρκεια της ημέρας

~~$X(t)$~~ ... ... στις 8^{00}, 14^{00}, 20^{00}, 24^{00}

X_n $\quad t_1 \quad t_2 \quad t_3 \quad t_4$

<u>Ορισμός</u>

Κάθε δυνατή τιμή μιας σ.δ. λέγεται <u>κατάσταση</u>

Το σύνολο των καταστάσεων αποτελεί τον <u>χώρο καταστάσεων της σ.δ.</u> (συμβ. S

<u>πχ</u>: • $X(t)$ η αξία μιας μετοχής → σ.δ. σε συνεχή χρόνο

Έστω σύνολο καταστ. $[0, +\infty)$, είναι συνεχές

• X_n η κατάσταση του ασανσέρ, $\{$ΛΕΙΤ, ΔΕΝ ΛΕΙΤ$\}$
$\qquad\qquad\qquad\qquad 0 \qquad\qquad 1$

<u>Ορισμός</u>

Μια στοχαστική διαδικασία λέμε ότι παίρνει τιμές σε <u>διακριτό χώρο</u> όταν ο χώρος των καταστάσεων παίρνει διακριτές τιμές.

Ενώ λέμε ότι έχουμε μια <u>σ.δ. με συνεχή χώρο καταστάσεων</u>, όταν ο χώρος των καταστάσεων S είναι συνεχές σύνολο.

②

σε διακρ. χρόνο με διακρ. χώρο	σε συν. χρόνο με διακρ. χώρο
σε διακρ. χρόνο με συν. χώρο	σε συνεχή χρόνο με συνεχή χώρο

Χρόνος T → Διακριτό, Συνεχή

Χώρος S → Διακριτός, Συνεχής

Παραδείγματα

① Ανάπτυξη Πληθυσμών

Έστω $X(t)$ ο αριθμός των μελών ενός πληθυσμού

Αρχικό μέγεθος $X(0)$

$$X(t) = X(0) + \underbrace{\text{ΜΠ}(t)}_{\text{όσοι μπήκαν μέχρι την } t} - \underbrace{\text{ΕΦ}(t)}_{\text{όσοι έφυγαν μέχρι την } t}$$

- Συνεχής ~~χώρος~~ χρόνος
- Διακριτός χώρος

② Έλεγχος αποθεμάτων

X_n: ο αριθμός των προϊόντων στο σύστημα μηχαν/σης μιας αποθήκης στο τέλος του n-οστού μήνα

Y_n: ο αριθμός ... στα ράφια μιας αποθήκης

$$\underbrace{X_n}_{\text{αριθμός στο τέλος του n-οστού μήνα}} = \underbrace{X_{n-1}}_{\text{όσα είχα στο τέλος του προηγούμ.}} + \underbrace{\text{ΑΓ}_n}_{\text{όσα αγόρασε στο διάστημα } (n-1,\, n) \text{ από την εταιρία}} - \underbrace{\text{ΖΗΤ}_n}_{\text{όσα ζητήθηκαν από τους πελάτες}}$$

$$Y_n = \max\{0,\ X_{n-1} + \text{ΑΓ}_n - \text{ΖΗΤ}_n\}$$

③ Οικολογική αντιπαράθεση

Έστω A, B δύο εχθρικοί πληθυσμοί που ζουν μαζί σε κάποιο συγκεκριμένο περιβάλλον. Αν μέλος του A πληθ. βρεθεί με μέλος B πληθ., γίνεται μάχη

$$\left.\begin{array}{l} \text{Ο A σκοτώνει τον B με πιθανότητα } p \\ \text{Ο B} \quad \ldots \quad \text{A} \quad \ldots \quad q \end{array}\right\} p+q=1$$

Έστω X_n η σ.δ. που παριστάνει τον αριθμό των μελών του πληθυσμού A μετά τη n-οστή μάχη

$$\underset{\substack{\text{αριθμός}\\ \text{μετά την}\\ \text{n-οστή μάχη}}}{X_n} = \underset{\substack{\text{αριθμός}\\ \text{μετά την}\\ \text{n-1 μάχη}}}{X_{n-1}} + \underset{\substack{\text{αριθμός}\\ \text{γεννήσεων}\\ (n-1,\,n)}}{\Gamma_n} - \underset{\substack{\text{αριθμός}\\ \text{θανάτων}\\ (n-1,\,n)}}{\Pi_n} + Z_n$$

$$Z_n = \begin{cases} -1, & \text{όταν χάσει το A} \quad P(Z_n=-1)=q \\ 0, & \text{όταν κερδίσει το A} \quad P(Z_n=0)=p \end{cases}$$

<u>ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΤΩΝ Σ.Δ. ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΙΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΕΞΑΡΤΗΣΗΣ ΠΟΥ ΤΗΝ ΑΠΟΤΕΛΟΥΝ</u>

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>

Μια σ.δ. ονομάζεται <u>Μαρκοβιανή</u>, αν δοθείσης της κατάστασης τη χρ. στιγμή t (παρόν), η κατάσταση της τη χρ. στιγμή s, με s>t (μέλλον) δεν εξαρτάται από τις χρ. στιγμές u, u<t (παρελθόν)

Δηλαδή ⇒ $P(a < X(s) < b \mid X(t_0)=\ldots, \ldots, X(t)=\ldots) = P(a < X(s) < b \mid X(t))$

$$P(X_n=j \mid X_0=\ldots, X_1=\ldots, \ldots, X_{n-1}=i) = P(X_n=j \mid X_{n-1}=i)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια σ.δ. σε διακριτό χρόνο με διακριτό χώρο, που επιπλέον ικανοποιεί τη Μαρκοβιανή ιδιότητα, λέγεται Μαρκοβιανή αλυσίδα (Μ.Α.)

$P(X_n=j|X_{n-1}=i) = P_{ij}(n-1,n)$ Η πιθανότητα να μεταβώ από την κατάσταση i που βρίσκομαι τη χρ στιγμή n-1, στην κατάσταση j τη χρ στιγμή n

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια ΜΑ λέμε ότι έχει την ιδιότητα της στατικότητας και την ονομάζουμε ομογενή Μ.Α. αν η $P_{ij}(n-1,n)$ είναι ανεξάρτητη του n, $\forall i,j \in S$

P_{ij}: πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος

ΟΜΟΓΕΝΗΣ ΜΑ Δύο Καταστάσεων

X_n: μια σ.δ. σε διακριτό χρόνο με διακριτό χώρο καταστάσεων $S=\{0,1\}$

Το μέλλον εξαρτάται από το παρόν και όχι από το παρελθόν

$P_{ij}(n-1,n)$ ανεξ/της από το n

Οι πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος είναι:

→ $P_{00} = P(0 \to 0)$

→ $P_{01} = P(0 \to 1)$

→ $P_{10} = P(1 \to 0)$

→ $P_{11} = P(1 \to 1)$

Εναλλακτικά, μας δίνεται ο πίνακας των πιθανοτήτων μετάβασης

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{bmatrix} \end{array}$$

$P_{00}+P_{01}=1$

$P_{10}+P_{11}=1$

$$P = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} a+b\neq 0 \\ a+b\neq 2 \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} a+b=0 \Longrightarrow a=b=0 \Longrightarrow P=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ a+b=2 \Longrightarrow a=b=1 \Longrightarrow P=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{δεν υπάρχει νόημα να τα εξετάσουμε.}$$